SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

U. MASSARI

FRONTIERE MINIME CON VINCOLO DI VOLUME

6-13 MAGGIO 1982

In questo seminario, vengono esposti alcuni risultati di regolarità per insiemi che minimizzano il perimetro con vincolo di volume. Tali risultati sono contenuti nei lavori [2], [5] e [8].

Problemi di minimo per funzionale "tipo perimetro" con vincolo di volume compaiono nello studio di alcuni fenomeni di capillarità, come, ad esempio, la determinazione della configurazione di equilibrio di una massa di liquido dentro un contenitore o di una goccia appoggiata o pendente da un piano o da un rubinetto, oppure lo studio di una massa di fluido ruotante (modelli di nuclei atomici pesanti o modelli di galassie), ecc..

Per arrivare ad una formulazione precisa del problema, diamo alcune definizioni.

Sia Ω un aperto di R^n ed $E \subset R^n$ un insieme misurabile. Chiameremo perimetro di E in Ω la quantità:

$$\int_\Omega |D\phi_E| = \sup \{ \int_E \operatorname{div} g \, dx ; \; g \in C_0^1(\Omega, R^n), \; |g| \leqslant 1 \}$$

e diremo che E ha perimetro finito in Ω se $\int_\Omega |D\phi_E| < +\infty$.

E' facile da verificare che un insieme E ha perimetro finito in Ω se e solo se le derivate nel senso delle distribuzioni della funzione caratteristica di E, che indicheremo con $D_i\phi_E$ sono delle misure di Radon con variazione totale finita in Ω. Inoltre la variazione totale in Ω della misura vettoriale $D\phi_E = (D_1\phi_E, D_2\phi_E, \dots, D_n\phi_E)$ è proprio il perimetro di E in Ω.

Se per l'insieme E valgono le formule di Gauss-Green (ad esempio se $\partial E \in C^1$), allora:

$$\int_E \operatorname{div} g \, dx = \int_{\partial E} g \cdot \nu \, dH_{n-1}$$

(ν normale esterna a ∂E); quindi $\int_\Omega |D\phi_E|$ coincide con la misura della frontiera di E elementarmente definita.

Il perimetro è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza $L^1_{loc}(\Omega)$; cioè se $\{E_h\}$ è una successione di insiemi con $\phi_{E_h} \to \phi_E$ in $L^1_{loc}(\Omega)$, allora:

$$\int_\Omega |D\phi_E| \leqslant \liminf_h \int_\Omega |D\phi_{E_h}|$$

Inoltre vale il seguente Teorema di compattezza. Se $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\exists c = c(\Omega') > 0$ tale che

$$\int_{\Omega'} |D\phi_{E_h}| \leqslant c \qquad \forall h$$

allora la successione $\{\phi_{E_h}\}$ contiene una sottosuccessione convergente in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Supponiamo ora che l'aperto Ω sia limitato e che la sua frontiera sia lipschitziana. Indichiamo con Γ in boreliano di $\partial\Omega$ e con α un numero in $(0,|\Omega|)$. Il problema che studieremo è il seguente:

$$* \qquad I(F) = \int_\Omega |D\phi_F| + \int_{\partial\Omega} |\phi_F - \phi_\Gamma| \, dH_{n-1} \to \min$$

nella classe

$$E_\alpha = \{F \subset \Omega, \ |F| = \alpha\} .$$

Nell'integrale su $\partial\Omega$, con ϕ_F abbiamo indicato la traccia di F su $\partial\Omega$; traccia che esiste in quanto F ha perimetro finito in Ω e per quasi ogni $x \in \partial\Omega$ (rispetto alla misura H_{n-1}) risulta:

$$\phi_F(x) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{|F \cap B_\rho(x)|}{|\Omega \cap B_\rho(x)|}$$

Per ragioni tecniche, in questi tipi di problemi si preferisce mettere la condizione richiesta al bordo come penalizzazione nel funzionale (se $\phi_F \neq \phi_\Gamma$ su $\partial\Omega$) piuttosto che richiedere che in E_α valga $\phi_F = \phi_\Gamma$ su $\partial\Omega$, perché in generale la traccia non è conservata dalla convergenza L^1_{loc} garantita dal Teorema di compattezza.

Che il funzionale I abbia minimo in E_α è una conseguenza immediata del Teorema di compattezza, della semicontinuità del perimetro e del fatto che se B è una sfera con $\Omega \subset\subset B$ ed M un insieme di perimetro finito in $B - \overline{\Omega}$ con $\phi_M = \phi_\Gamma$ su $\partial\Omega$, allora, posto:

$$F' = \begin{cases} F & \text{in } \Omega \\ M & \text{in } B - \overline{\Omega} \end{cases}$$

si ha:

$$I(F) = \int_B |D\phi_{F'}| - \int_{B-\overline{\Omega}} |D\phi_M| .$$

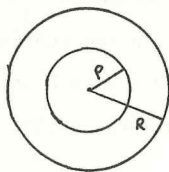
Infatti sia $F_h \in E_\alpha$ una successione minimizzante, cioè tale che $I(F_h) \to m = \inf_{E_\alpha} I(F)$, allora $\int_B |D\phi_{F'_h}| <$ cost e quindi, per il Teorema di compattezza, posso supporre, a meno di passare a una sottosuccessione che $\phi_{F'_h} \to \phi_{E'}$ in $L^1_{loc}(B)$. Risulta $E \in E_\alpha$ e, dalla semicontinuità del perimetro, $I(E) < \liminf_h I(F_h) = m$; $\Rightarrow$ $I(E) = m$.

Lo studio della regolarità di un minimo E del problema considerato è invece molto più difficile. Un primo passo consiste nella dimostrazione della seguente proprietà di regolarità debole.

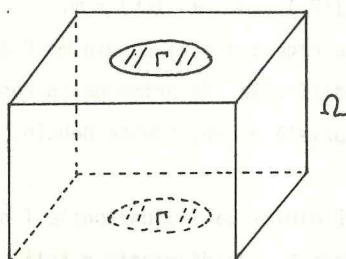
<u>Teorema 1</u>. Se E minimizza il funzionale I nella classe E_α, allora esiste $r > 0$ e due sfere B_1, B_2 di raggio r tali che:

$$|B_1 \cap E| = 0$$
$$|B_2 - E| = 0$$

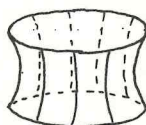
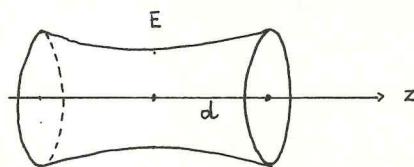
(B_1 esterna ad E e B_2 interna).

La dimostrazione di questo Teorema consiste nel provare che se per una sfera $B_R \subset \Omega$, $|E \cap B_R|$ è piccolo rispetto a R, allora esiste $\rho \in (0,R)$ tale che $E \cap \partial B_\rho = \emptyset$

Allora o $E \cap B_\rho = \emptyset$, oppure E minimizza il perimetro in B_ρ con vincolo di volume e dato 0, allora, per la proprietà isopermietrica della sfera, E è una sfera contenuta in B_ρ. In ogni caso esiste una sfera B_1 con $|E \cap B_1| = 0$.

La sfera interna si ottiene ragionando nello stesso modo sullo insieme $\Omega - E$, che minimizza ancora un funzionale del tipo considerato con dato $1 - \phi_\Gamma$ su $\partial\Omega$ e vincolo di volume $|\Omega| - \alpha$.

Per illustrare la tecnica di dimostrazione del Teorema 1, consideriamo il seguente esempio in R^3, Ω e Γ siano come in figura,

dove si suppone che le due sfere che formano Γ abbiano raggio 1 e distino 2d.

Consideriamo, per semplificare il calcolo, il problema di minimizzare il funzionale I senza porre vincolo di volume.

Se d è piccolo la soluzione è indicata in figura

La superficie laterale dell'insieme E è un pezzo di catenoide. Se d è grande però la soluzione del problema non può essere connessa e si vede facilmente allora che deve essere $E = \emptyset$. Infatti supponiamo che E sia come in figura.

(che la soluzione sia un insieme di rotazione attorno all'asse z è una conseguenza della simmetria del dato Γ). Indichiamo con

$$f(t) = |F \cap \{z = t\}|$$

$$v = \int_{-a}^{d} f(t)dt$$

Indicata con A la superficie laterale di E, risulta dalla proprietà di minimo di E che

$$A \leqslant f(d) + f(-d) = 2\pi$$

Allora dalla proprietà isoperimetrica:

$$v^{2/3} \leqslant c(A + f(d) + f(-d)) \leqslant 4c\pi$$

dove c indica la costante isoperimetrica in R^3.

Siano ora $t_1 \in (\frac{d}{3}, \frac{2}{3}d), s_1 \in (-\frac{2}{3}d, -\frac{d}{3})$ tali che $f(t_1) < \frac{3v}{d}$, $f(s_1) < \frac{3v}{d}$, chiamando v_1 il volume tra s_1 e t_1, sempre per la proprietà isoperimetrica della sfera e la minimalità di E si ottiene
$v_1^{2/3} \leqslant 2c(f(t_1) + f(t_2)) \leqslant 4c\,\frac{3v}{d} \leqslant (4c)^{1+3/2}\,\frac{3\,\pi^{3/2}}{d}$ ossia

$$v_1 \leqslant (4c)^{3/2+(3/2)^2}\,\pi^{(3/2)^2}\,\frac{3^{3/2}}{d^{3/2}}$$

Ora dividendo l'intervallo (s_1, t_1) in 6 parti uguali è possibi- le scegliere (s_2, t_2) come in figura tali che:

$$f(t_2) \leqslant \frac{v_1}{\frac{t_1 - s_1}{6}} \leqslant \frac{3^2\,v_1}{d} \qquad (t_1 - s_1 > \frac{2}{3}d)$$

$$f(s_2) \leqslant \frac{3^2 v_1}{d}$$

Allora indicando con v_2 il volume tra s_2 e t_2 si ha:

$$v_2^{3/2} \leqslant 4c\;3^2\,\frac{v_1}{d} \leqslant \frac{(4c)^{1+3/2+(3/2)^2}\,\pi^{(3/2)^2}\,3^{2+3/2}}{d^{1+3/2}} \qquad \text{ossia}$$

$$v_3 \leqslant \frac{(4c)^{3/2+(3/2)^2+(3/2)^3}\,\pi^{(3/2)^3}\,3^{2+3/2+(3/2)^2}}{d^{3/2+(3/2)^2}}$$

Procedendo ora in questa maniera si ottengono due successioni $s_j\uparrow$ $t_j\downarrow$ che convergono allo stesso limite verificante le relazioni

$$f(t_j) < \frac{3^j\, v_{j-1}}{d} \qquad\qquad f(s_j) < \frac{3^j\, v_{j-1}}{d}$$

e

$$v_j < \frac{(4c)^{\sum_{i=1}^{j} (3/2)^i}\ \pi^{(3/2)^j}\ 3^{\sum_{i=1}^{j-1} i(3/2)^{j-i}}}{d^{\sum_{i=1}^{j-1} (3/2)^i}}$$

$$= \left[\frac{(4c)^{\sum_{i=1}^{j} (3/2)^{i-j}}\ \pi\ 3^{\sum_{i=1}^{j-1} i(3/2)^{-i}}}{d^{\sum_{i=1}^{j-1} (3/2)^{i-j}}} \right]^{(3/2)^j}$$

Supponendo $d \geqslant 1$ si ottiene

$$v_j \leqslant \left(\frac{(4c)^3\ \pi\ 3^9}{d^{2/3}}\right)^{(3/2)^j}$$

ne segue che se $\dfrac{(4c)^3\ \pi\ 3^9}{d^{2/3}} < \dfrac{1}{2}$

$$v_j \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{(3/2)^j} \qquad \text{e quindi}$$

$$f(t_j) \leqslant \frac{3^j}{d} \left(\frac{1}{2}\right)^{(3/2)^j} \underset{j \to +\infty}{\to 0}$$

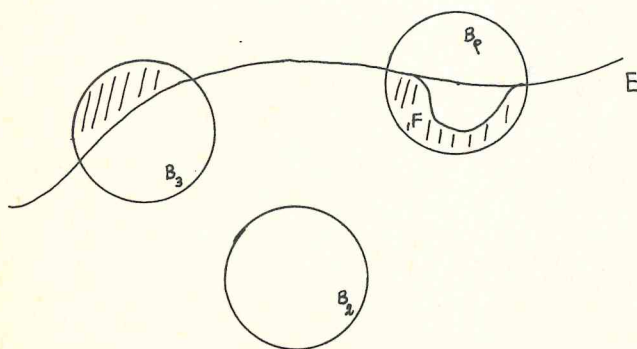
Analogamente per s_j, ne segue che posto t_o il limite comune di s_j e t_j risulta $f(t_o) = 0$.

Se si considera il problema con vincolo di volume, non si può più usare la diseguaglianza da cui siamo partiti $A \leqslant f(d) + f(-d)$. La diseguaglianza che vale in questo caso è

$$A < f(d) + f(-d) + 4\pi\left(\frac{v}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{2/3}$$

dove l'ultimo termine è il perimetro della sfera di volume v (supporto che tale sfera possa essere inserita tra i due piani di distanza 2d).

Usando questa nuova diseguaglianza i calcoli fatti in precedenza si possono rifare con qualche piccola modifica e ottenere lo stesso risultato.

Dal Teorema di regolarità debole, si ottiene poi un risultato di regolarità più forte, analogo a quello ottenuto da De Giorgi-Federer per il problema senza vincolo. Infatti supponiamo che E minimizzi il funzionale I con vincolo di volume e sia B_ρ una sfera contenuta in Ω con $|B_\rho \cap E| < |B_2 \cap E| = |B_2|$. Sia F un insieme con $F \Delta E = (F-E) \cup (E-F) \subset\subset B_\rho$. Supponiamo che $|F \cap B_\rho| \leqslant |E \cap B_\rho|$

Muovendo la sfera B_2 possiamo ottenere una nuova sfera B_3 tale che

$$B_3 \cap B_\rho = \emptyset \qquad |(B_3 - E) \cup F| = |E|$$

Posto $F' = (B_3 - E) \cup F$, dalla proprietà di minimo di E si ha:

$$\int_\Omega |D\phi_E| \leqslant \int_\Omega |D\phi_{F'}| \qquad \text{e quindi}$$

$$\int_{B_\rho} |D\phi_E| + \int_{B_3} |D\phi_E| \leqslant \int_{B_\rho} |D\phi_F| + \int_{\partial B_3} (1 - \phi_E)\, dH_{n-1}$$

D'altra parte per la sfera vale la seguente proprietà:

$A \subset B_3$

$$\int_{\partial B_3} \phi_A \, dH_{n-1} \leqslant \int_{B_3} |D\phi_A| + \frac{n}{r} \int_{B_3} \phi_A \, dx ;$$

nel nostro caso con $A = B_3 - E$, si ottiene:

$$\int_{B_\rho} |D\phi_E| - \int_{B_\rho} |D\phi_F| < \frac{n}{r} |B_3 - E| \leqslant \frac{n}{r} \omega_n \rho^n$$

La stessa diseguaglianza si ottiene in maniera analoga nel caso che $|F \cap B_\rho| > |F \quad B_\rho|$. Ne segue che

$$\psi(E,B_\rho) = \sup \{ \int_{B_\rho} |D\phi_E| - \int_{B_\rho} |D\phi_F| \; ; \quad F \Delta E \subset\subset B_\rho \} \leqslant \frac{n}{r} \omega_n \rho^n$$

La funzione $\psi(E,B_\rho)$, che indica quanto il perimetro di E in B_ρ è lontano dal minimo valore possibile, è ben nota nella teoria degli insiemi di perimetro finito. Il suo comportamento in ρ determina la regolarità della frontiera. In particolare vale il seguente

Teorema 2. Se $\forall\, B_\rho \subset \Omega$, $\psi(E,B_\rho) < \text{cost.}\ \rho^{n-1+2\varepsilon}$ allora esiste un sottinsieme aperto di ∂E, che indicheremo con ∂^*E, che è una varietà (n-1)-dimensionale di classe $C^{1,\varepsilon}$, inoltre $H_s(\partial E - \partial^* E) = 0 \quad \forall s > n-8$. (Vedere per esempio [3], [4], [6], [7]).

In particolare se $n \leqslant 7$, $\partial E - \partial^* E = \emptyset$.

Scrivendo poi ∂^*E localmente come grafico di una funzione e usando la teoria dei moltiplicatori di Lagrange per il caso non-parametrico, si prova con un metodo standard che ∂^*E è una varietà (n-1) dimensionale analitica con curvatura media costante.

Se $n \geqslant 8$, $\partial E - \partial^* E$ può essere diverso dal vuoto, come si verifica ad esempio per il cono di Simon:

$$C = \{(x,y) \in R^4 \times R^4, \quad |x|^2 < |y|^2\}$$

C ha perimetro minimo in ogni sfera B_ρ e $o \in \partial E - \partial^* E$ (vedi [1]).

Il Teorema 1 può essere usato anche per dimostrare per il problema con vincolo di volume un teorema tipo "moltiplicatore di Lagrange".

Una sua formulazione per il funzionale I vicina a quella classica può essere enunciata nella seguente maniera.

Gli insiemi che minimizzano I nella classe E_α sono punti di minimo per il funzionale

$$J_\lambda(F) = I(F) + \lambda(|F| - \alpha)$$

per qualche valore di λ, senza vincolo di volume?

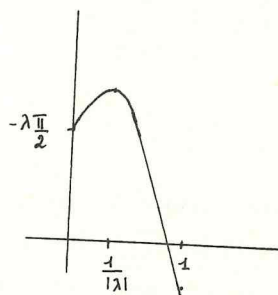
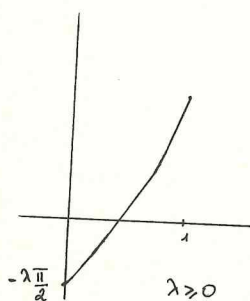
La risposta è affermativa se si aggiunge la condizione che gli insiemi della famiglia E_α siano sottografici di funzioni definite in un aperto di R^{n-1}. In generale invece la risposta è negativa.

Consideriamo ad esempio il caso in cui Ω sia un cerchio di raggio 1 in R^2, $\Gamma = \emptyset$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ogni cerchio di area $\frac{\pi}{2}$ contenuto in Ω è un minimo per I in $E_{\frac{\pi}{2}}$, mentre se B_ρ è una sfera di raggio ρ contenuta in Ω

$$J_\lambda(B_\rho) = I(B_\rho) + \lambda(|B_\rho| - \frac{\pi}{2}) = \pi(2_\rho + \lambda(\rho^2 - \frac{1}{2}))$$

(E' chiaro che i minimi di J_λ se $\Gamma = \emptyset$, vanno ricercati tra le sfere in Ω).

L'andamento della funzione $J_\lambda(B_\rho)$ è il seguente

$\lambda < 0$

E quindi i minimi per J_λ sono dati o dall'insieme vuoto o da tutto Ω.

Vale però il seguente Teorema

Teorema 3. Se E minimizza il funzionale I nella classe E_α, allora $\lambda > 0$ tale che E minimizza il funzionale:

$$\tilde{J}_\lambda(F) = I(F) + \lambda||F| - \alpha|$$

senza vincolo di volume.

Basta provare che esiste $\lambda > 0$ tale che ogni minimo del funzionale $\tilde{J}_\lambda$ ha misura α. Infatti se indichiamo con E_λ un minimo di $\tilde{J}_\lambda$ e se $|E_\lambda| = \alpha$, allora $I(E) = I(E_\lambda)$ e quindi F Ω:

$$\tilde{J}_\lambda(F) > \tilde{J}_\lambda(E_\lambda) = I(E_\lambda) = I(E) = \tilde{J}_\lambda(E)$$

Osserviamo innanzi tutto che $\lambda > 0$

$$\tilde{J}_\lambda(E_\lambda) \leqslant \tilde{J}_\lambda(E) = I(E),$$

e quindi

$$\int_\Omega |D\phi_{E_\lambda}| \leqslant I(E)$$

$$\lambda \big| |E_\lambda| - \alpha \big| \leqslant I(E)$$

Allora $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} |E_\lambda| = \alpha$.

D'altra parte è da notare che il raggio r del Teorema 1 dipende da E tramite il perimetro di E e le quantità $|E|$ e $|\Omega| - |E|$. In altre parole per ogni insieme E che minimizza il funzionale I con vincolo di volume e verifica

$$0 \leqslant a \leqslant |E| \leqslant b < |\Omega| \;, \qquad \int_\Omega |D\phi_E| < c$$

le sfere B_1 e B_2 del Teorema 1 si possono scegliere con lo stesso raggio r (dipendente solo da a, b, c).

Esiste pertanto λ_0, tale che $\forall \lambda > \lambda_0$, E_λ ed $\Omega - E_\lambda$ contengono rispettivamente due sfere di raggio r indipendente da λ.

Supponiamo ora che per $\lambda > \lambda_o$ $|E_\lambda| < \alpha$.

Ragionando come si è fatto per provare la regolarità, sia B_3 una sfera di raggio r con $|B_3 - E_\lambda| > 0$ e $|E_\lambda \cup (B_3 - E_\lambda)| < \alpha$.

Posto $F' = E_\lambda \cup (B_3 - E_\lambda)$ risulta:

$$\tilde{J}_\lambda(F') - \tilde{J}_\lambda(E_\lambda) = \int_{\partial B_3} (1 - \phi_{E_\lambda}) \, dH_{n-1} - \int_{B_3} |D\phi_{E_\lambda}|$$

$$+ \lambda(\alpha - (|E_\lambda| + |B_3 - E_\lambda|)) - \lambda(\alpha - |E_\lambda|$$

e ricordando la proprietà già usata della sfera

$$\tilde{J}_\lambda(F') - \tilde{J}_\lambda(E_\lambda) \leqslant (\frac{n}{r} - \lambda) \, |B_3 - E_\lambda| < 0$$

se $\lambda > \frac{n}{r}$. Questo contrasta con la proprietà di minimo di E_λ. In modo analogo si ragiona se fosse $|E_\lambda| > \alpha$. Pertanto se

$$\lambda > \max \{\lambda_o, \frac{n}{r}\} , \qquad |E_\lambda| = \alpha .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BOMBIERI-GIUSTI-DE GIORGI: Minimal cones and the Bernstein problem. Inventiones Math. 7 (1969) 243-269.

[2] CONGEDO-GONZALEZ: Sul problema di Plateau con volume fissato. Quaderni dell'Univ. Lecce n. 15 (1981).

[3] DE GIORGI-COLOMBINI-PICCININI: Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate. Pisa (1972).

[4] FEDERER: The singular sets of area minimizing reetifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with orbitrary codimension. Bull. Am. Math. Society 76 (1970) 767-771.

[5] GONZALEZ-MASSARI-TAMANINI: On the regularity of baundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint. To appear on Indiana J. of Math.

[6] MASSARI U.: Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in R^n. Arch. Rat. Mech. Analysis 55 (1974) 357-382.

[7] MIRANDA M.: Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19 (1955).

[8] TAMANINI: Boundaries of Caccioppoli sets with Hölder continuous normal vector. To apperar on J. Rein. Ang. Math.